Splošna teorija relativnosti

Zotkini dnevi odprtih vrat jesen 2026

Borut Jurčič Zlobec

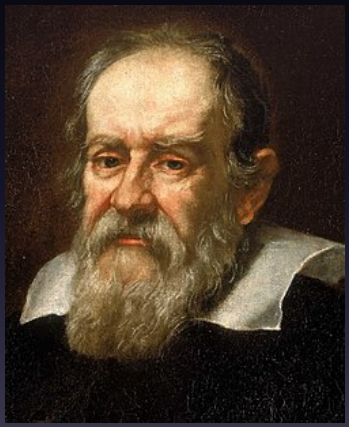
Zveza za tehnično kulturo ZOTKS

27. oktober 2026

Glavni igralci v naši zgodbi



Aristotel

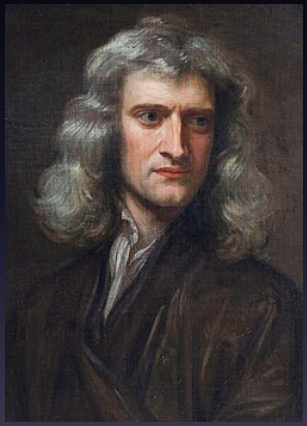


Galileo Galilei

Glavni igralci v naši zgodbi



Johanes Kepler



Isaac Newton

Glavni igralci v naši zgodbi



Johann Carl Friedrich Gauß



Bernhard Riemann

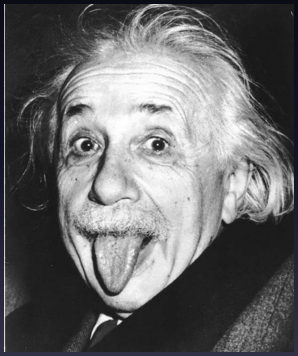
Glavni igralci v naši zgodbi



Marcel Grossmann

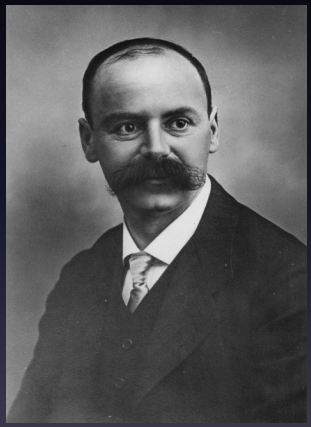


David Hilbert



Albert Einstein

Glavni igralci v naši zgodbi



Karl Schwarzschild



Emmy Noether

Aristotel (384–322 p.n.š.)

- Aristotela so zanimala gibanja in vzroki zanje.
- Nekatere njegove znanstvene razlage so bile napačne, vendar je pomembno vplival na razvoj znanosti.
- Aristotel je menil, da težja telesa padajo hitreje kot lažja telesa enake oblike in velikosti.
- Njegova temeljna misel: Stvari najbolje razumemo, če raziskujemo njihove vzroke in značilnosti.
- Aristotelova filozofija je stoletja močno vplivala na evropsko misel, zlasti v srednjem veku.

Galileo Galilej (1564–1642)

- Galilej je ugotovil, da vsa telesa padajo z enakim pospeškom, ne glede na njihovo maso.
- Legenda pravi, da je Galilej ta poskus izvedel s spuščanjem teles različnih mas s stolpa v Pisi.
- V resnici je Galilej raziskoval padanje teles s poskusi na poševnih klancih, kjer je bilo gibanje počasnejše in ga je lažje meril.
- Trdil je, da bi vsa telesa v vakuumu padala enako hitro, saj nanje ne bi vplival zračni upor.
- Razlike pri padanju v zraku nastanejo zaradi zračnega upora, ki lažja ali manj aerodinamična telesa lahko bolj upočasni.

Johannes Kepler (1571–1630)

Tycho Brathe (1546–1601) je bil natančen opazovalec zvezdnega neba pred izumom teleskopa. Po njegovi smrti je Kepler dobil v roke njegove zapiske o gibanju planeta Marsa. Zagovorniki heliocentričnega sončnega sestava so trdili, da so tiri planetov okoli Sonca idealne krožnice. Kepler pa je ob natančnem pregledu zapiskov Bratha ugotovil, da ni tako. Svoje ugotovitve je strnil v obliki treh zakonov.

1. Tiri planetov so eliptični. V enem od gorišč elips se nahaja Sonce.
2. Zveznica med planetom in Soncem v enakih časih opiše enake ploščine. Posledica tega je, da se planet giblje hitreje, ko je bližje Soncu.
3. Kvadrat obhodnega časa planeta je sorazmeren s kubom njegove povprečne oddaljenosti od Sonca.

Isaac Newton (1672–1727)

Isaac Newton je izpeljal gravitacijski zakon iz tretjega Keplerjevega zakona. Izrazimo pospešek pri enakomernem kroženju a s krožno hitrostjo $\omega = v/R = 2\pi/T$, kjer je v obhodna hitrost, R je polmer kroženja in T je čas enega obhoda 2π radianov. Pospešek je sprememba hitrosti v časovni enoti. Pri enakomernem kroženju se velikost vektorja hitrosti ne spreminja, spreminja se le njegova smer. V času enega obhoda T se vektor hitrosti zavrti za 360° oziroma 2π radianov. Od tod sledi:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi v}{T} = \omega v = \omega^2 R. \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Zapišimo tretji Keplerjev zakon: $\frac{T^2}{R^3} = konst$, kjer je T obhodni čas in R povprečna razdalja planeta od Sonca.

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\omega^2 R^3} = \frac{4\pi^2}{aR^2} = k, \quad a = \frac{4\pi^2 k}{R^2}.$$

Pričakujemo, da je gravitacijski pospešek premo sorazmeren z maso Sonca M, kar pomeni, da se masa Sonca skriva v konstantnem faktorju, torej $4\pi^2 k = GM$. Upoštevamo še drugi Newtonov zakon $F = ma$ in dobimo gravitacijski zakon.

$$F = G\frac{mM}{R^2},$$

kjer je m masa planeta.
Gravitacijski zakon je uspešno predvidel mrke in v večini primerov daje pravilni odgovor o gibanju nebesnih teles.
Vendar pa je Newton slutil, da tukaj nekaj ni v redu. Ni mogel razložiti, kako mase učinkujejo med seboj skozi prazen prostor brez medsebojnega stika.

Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855)

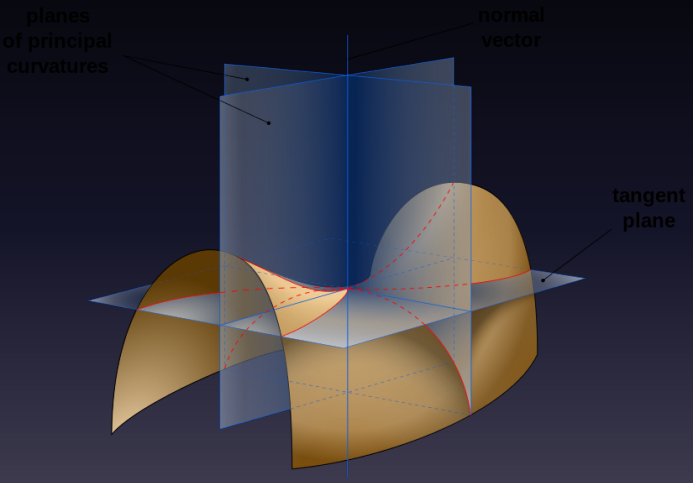
- Po več letih študija v Göttingenu se je leta 1798 vrnil v rodni Braunschweig.
- V doktorski disertaciji je podal dokaz osnovnega izreka algebre, ki pravi, da ima vsak nekonstanten polinom s kompleksnimi koeficienti vsaj eno ničlo.
- Gauss je rad računal. Ob tem pa je nastal marsikateri teoretični rezultat.
- Pripomogel je k razvoju teorije analitičnih funkcij in diferencialne geometrije.
- Njegovi teoretični in praktični prispevki k geodeziji so imeli močan vpliv na razvoj diferencialne geometrije.

- Na podlagi te izkušnje je leta 1827 nastalo pomembno delo o ukrivljenosti in razdalji na ploskvi.
  Disquisitiones generales circa superficies curvas.
- To je bil uvod v diferencialno geometrijo na ploskvah.
- Ločni element *ds* krivulje na ploskvi se izraža s kvadratno diferencialno formo:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{aligned}$$

Gaussova ukrivljenost

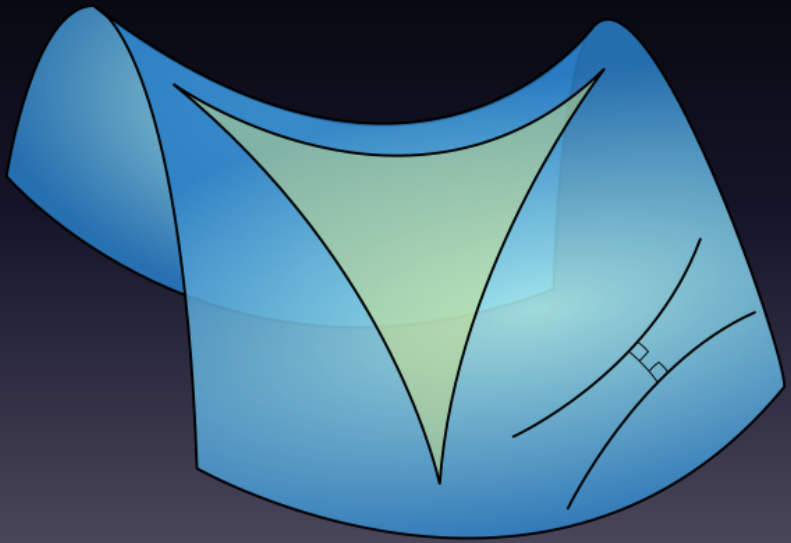


Različni preseki imajo različne ukrivljenosti; smeri z največjo κ_1 in najmanjšo κ_2 ukrivljenostjo se imenujeta glavni smeri. Gaussova ukrivljenost je definiciji enaka $K = \kappa_1 \kappa_2$.

Bernhard Riemann (1826–1866)

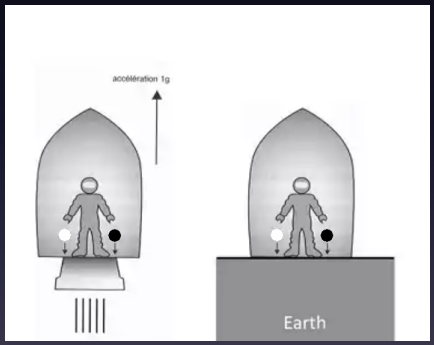
- Leta 1846 je začel študirati teologijo in filologijo na Univerzi v Göttingenu.
- Oče mu je leta 1847 dovolil, da je opustil teologijo in začel študirati matematiko. Poslušal je Gaussova predavanja o metodi najmanjših kvadratov.
- Leta 1847 se je preselil na Univerzo v Berlinu, kjer so predavali Jacobi, Dirichlet in Steiner. Tu je ostal dve leti in se leta 1849 vrnil v Göttingen.
- Leta 1951 je pod Gaussovim mentorstvom predložil doktorsko disertacijo, kjer je obravnaval Riemannove ploskve.
- Nekaj časa je bil Webrov asistent, kjer se je dobro spoznal s teoretično fiziko.
- Leta 1854 je začel predavati in utemeljil Riemannovo neevklidsko geometrijo, ki je bila pozneje pomembna za Einsteinovo splošno teorijo relativnosti.

Riemannova geometrija

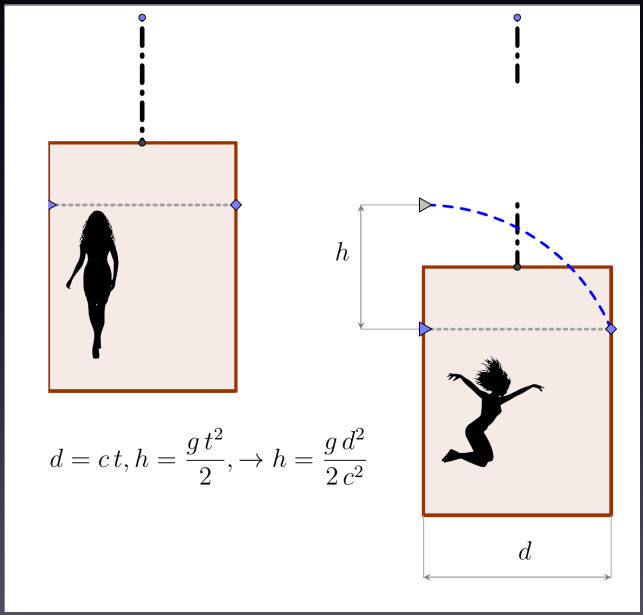


Princip ekvivalence

- Einsteinov miselni poskus, ki je spremenil pogled na gravitacijo.
- Njegov princip ekvivalence trdi, da ni razlike med gravitacijo in pospešenim gibanjem.
- Einstein si je zamislil potnika v raketi, ki pospešuje.
- Zaradi pospeševanja vsi predmeti dobijo težo ($F = ma$).
- Potnik vzame v roke dve različno težki, enako veliki krogli.
- Krogli spusti istočasno z enake višine nad tlemi.
- Ko potnik spusti krogli, obe potujeta skozi prostor z enako hitrostjo, kot jo je imela raketa v trenutku, ko je krogli spustil.
- Ker raketa pospešuje, se njeno dno približuje kroglama in ju doseže istočasno.
- To bi pomenilo, da gravitacija ni sila, ampak je stvar okolja.
- Posledica principa ekvivalence je, da gravitacija ukrivlja svetlobni žarek, kljub temu, da foton nima mase.
- Svoja dognanja je zaupal svojemu študijskemu kolegi Marcelu Grossmannu.
- Vprašanje, ki si ga je zastavil Grossmann: Ali je mogoče zmečkati prostor-čas, v katerem se nahaja masa tako, da bodo trajektorije v gravitacijskem polju postale optimalne trajektorije v zmečkanem prostor-času?



Ukrivljanje svetlobnega žarka



$$d = c\,t, h = \frac{g\,t^2}{2}, \rightarrow h = \frac{g\,d^2}{2\,c^2}$$

Marcel Grossmann (1878–1936)

- Študiral je skupaj z Einsteinom. V študijskih letih sta z Einsteinom navezala trdno prijateljstvo.
- Doktoriral je leta 1912.
- Od leta 1907 je predaval opisno geometrijo na Zvezni tehniški visoki šoli (Eidgenössische Technische Hochschule, ETH) v Zürichu.
- V letih 1909 do 1913 je z Einsteinom iskal enačbe gravitacijskega polja.
- Einsteinu je predstavil Riemannovo diferencialno geometrijo, kar je bil pomemben korak pri razvoju splošne teorije relativnosti.
- Zbolel je za multiplo sklerozo. Zaradi bolezni je bil več let pred smrtjo ohromljen.

David Hilbert (1862–1943)

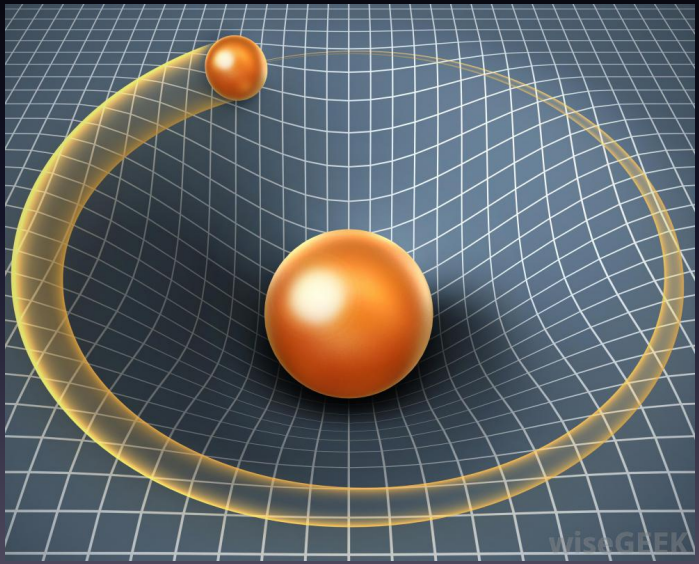
- Hilbert je bil eden najvplivnejših matematikov 19. in začetka 20. stoletja.
- Ukvarjal se je s teorijo števil, funkcionalno analizo, matematično fiziko in relativnostno teorijo.
- Na področjih, s katerimi se je ukvarjal, je prispeval več bazičnih teorij.
- Tako v teoriji invariant kot v aksiomatizaciji v geometriji.
- Formuliral je pojem Hilbertovega prostora, kar je eden od osnovnih pojmov v funkcionalni analizi.
- V obdobju fašizma v Nemčiji ga je na nekem srečanju minister za šolstvo v takratni vladi Bernhard Rust vprašal, ali je res, da se na Matematičnem inštitutu čuti pomanjkanje izobraženega kadra, odkar so ga Judje morali zapustiti. Hilbert je mirno odgovoril, da se na inštitutu ne čuti nobenega pomanjkanja, ker inštituta preprosto ni več.

- Do leta 1912 je bil Hilbert tako rekoč čisti matematik.
- Herman Minkowski je bil njegov bližnji prijatelj. Verjetno se je Hilbert lotil fizike pod njegovim vplivom.
- Po letu 1912, tri leta po smrti Minkowskega, se je popolnoma posvetil fiziki.
- Od leta 1907 se je Einstein ukvarjal s splošno teorijo relativnosti. Dolgih 8 let je poskušal teoriji dati končno obliko.
- Zgodaj poleti 1915 se je Hilbert začel zanimati za splošno teorijo relativnosti in je povabil Einsteina v Götingen.
- Novembra 1915 je Einstein napisal več člankov na temo splošne teorije relativnosti.
- V istem času je Hilbert napisal članek *Osnove fizike in aksiomatična izpeljava enačb splošne teorije relativnosti*.
- Hilbert dal vse priznanje začetnika splošne teorije relativnosti Einsteinu. (Einstein-Hilbertova akcija).

Albert Einstein (1879–1955)

- Odkar so matematiki zavzeli teorijo relativnosti, je ne razumem nič več.
- Zaradi tega sem se znašel v položaju Buridanovega osla, ki se ne more odločiti med dvema kopicama sena. To je zato, ker moja intuicija na področju matematike ni dovolj močna, da bi lahko izluščil to, kar je bilo najbolj pomembno, tu mi je primanjkovalo znanja.
- Hilbert se je rad pošalil na račun Einsteina: Vsak deček v Göttingenu pozna bolje štiridimenzionalno geometrijo kot Einstein.
  Vendar pa je ne glede na to bil Einstein tisti, ki je opravil delo, ne pa matematiki.

Ukrivljenost prostora



Časovnica 1915

1. Einstein in Grossmann sta bila prva, ki sta v članku Entwurf Theorie, objavljenem leta 1913, predlagala opis gravitacije s pomočjo psevdo-Rimannove metrike.
2. Grossmann je določil skrčitev Riemannovega tenzorja, ki je bil ključ za rešitev problema.
3. Zatem je sledila vrsta Einsteinovih poizkusov, da bi našel prave enačbe.
4. Hilbert je v juniju 1915 povabil Einsteina v Götingen. Tu je Einstein predaval o svojem raziskovanju na področju splošne teorije gravitacije.
5. Einstein je zatem ostal v Götingenu še štirinajst dni kot gost v Hilbertovi hiši.
6. Hilbert je v tem času poskušal povezati teorijo gravitacije s teorijo elektromagnetizma.
7. Einstein in Hilbert sta do novembra 1915 bila v stalnem stiku in sta si dopisovala.

Časovnica 1915

8. Medtem je Einstein imel štiri predavanja o svoji teoriji, 4., 11., 18. in 25. novembra v Berlinu.
9. Einstein je poslal Hilbertu v pregled svoje zapiske iz 4. in 11. novembra.
10. Hilbert je imel 16. novembra predavanje na Matematičnem društvu v Göttingenu.
11. Hilbert je 16. ali 17. novembra poslal Einsteinu informacije, ki so se nanašale na njegovo predavanje 1. novembra. Pismo se je izgubilo.
12. V svojem zadnjem predavanju 25. novembra je Einstein predstavil dokončno pravilno obliko enačb splošne teorije. Zatem je 2. decembra objavil članek, ne da bi omenil Hilberta.
13. Hilbertov članek je izšel z zamudo. Njegovi krtačni odtisi so še ohranjeni. Manjka ključna polovica strani, ki bi celotno dogajanje lahko predstavila v drugačni luči.
14. Hilbertov članek je bil pripravljen za objavo marca 1916, kjer je bila teorija predstavljena v kovariantni obliki. Pri tem je citiral Einsteina v zvezi z gravitacijskim potencialom v teoriji gravitacije.

Enačbe splošne teorije relativnosti

1. Christoffelovi simboli:

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} g_{\alpha\mu} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} g_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} g_{\alpha\nu}\right), \quad \Gamma^\rho_{\mu\nu} = g^{\rho\alpha}\Gamma_{\alpha\mu\nu}.$$

2. Riemann, Minkowsky metrični tenzor $g_{\alpha,\beta}$: $ds^2 = g_{\alpha,\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$
3. Riemannov tenzor: $R^\rho_{\sigma\,\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}$.
4. Ricci tenzor: $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\,\alpha\nu}$.
5. Ricci skalar: $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.
6. Enačbe gravitacijskega polja: $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$.
7. Hilbertova akcija: $S = \int \left[R + \mathcal{L}_M \right] \sqrt{-g}\, d^4x$.

Karl Schwarzschild (1873–1916)

- Einsteinov članek je še pred izidom dobil v roke Karel Schwarzschild, ki je bil v tem času kot nemški vojak na ruski fronti.
- V trušču vojne se je Schwarzschild lotil iskanja rešitve enačb.
- Poiskal je rešitev za nerotirajočo simetrično sferično maso.
- Tako je bil Schwarzschild prvi, ki je našel točno rešitev enačb.
- Rešitev opisuje prostor-čas zunaj simetrične sferične mase in napoveduje možnost obstoja **črnih lukenj**.
- Kljub hudi bolezni je svoje delo opravil med služenjem v nemški vojski med prvo svetovno vojno.

Schwarzschildova rešitev enačbe

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2\, dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2.$$

- Schwarzschildova rešitev Einsteinovih enačb opisuje gravitacijsko polje v okolici mirujoče sferične mase.
- Rešitev napoveduje črno luknjo.
- Schwarzschildov radij: $r_s = \frac{2GM}{c^2}$.
- To je polmer dogodkovnega obzorja $r = r_s$, ki je meja brez povratka.

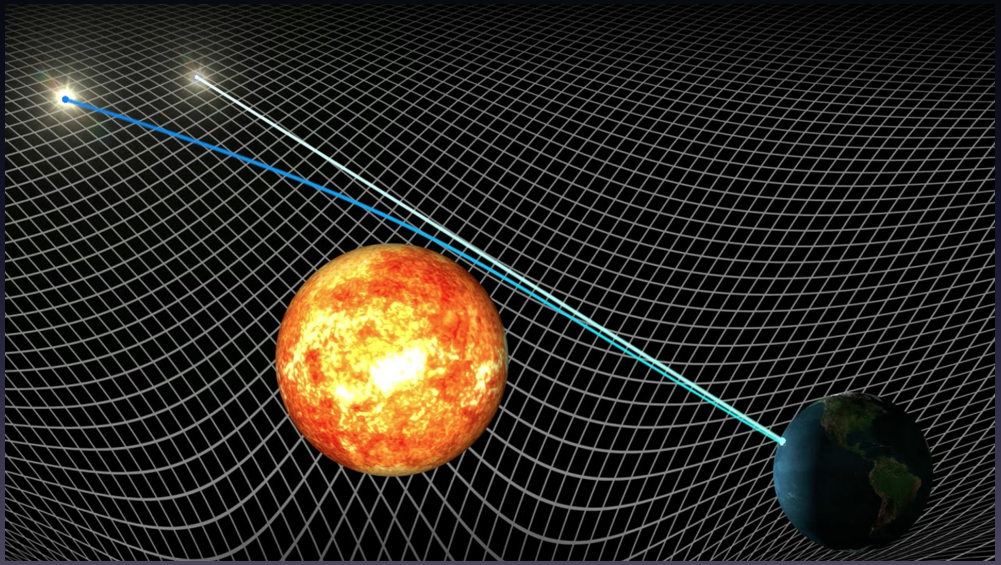
Emmy Noether (1873–1916)

- Emmy Noether je dokazala, da je ohranitev energije povezana s simetrijo glede na časovne premike.
- V splošni teoriji relativnosti velja lokalni zakon o ohranitvi energije in gibalne količine:

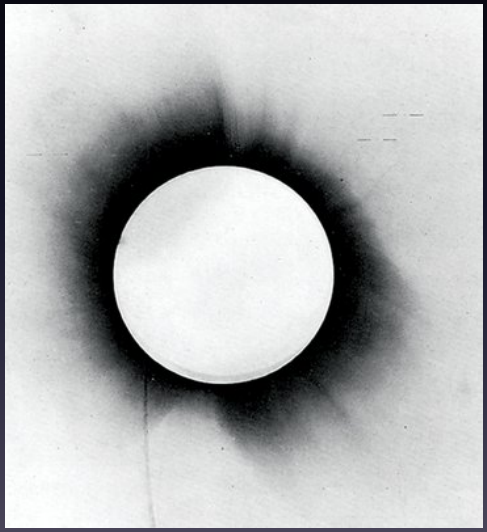
$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

- V ukrivljenem prostoru-času je globalna ohranitev energije odvisna od lastnosti prostora-časa, od obstoja časovne simetrije.
- Ohranitev energije v splošni teoriji je subtilnejša kot v Newtonovi mehaniki.
- Einstein je Noetherjevi priznal njen prispevek k splošni teoriji.
- Emmy Noether ni zgolj interpretirala že zapisane Einsteinove enačbe.
- Razvila je splošen matematični izrek, ki je bistveno poglobil naše razumevanje povezave med simetrijami in ohranitvenimi zakoni v fiziki.
- Einsteinova enačba ne zahteva, da je globalna energija vedno ohranjena.
- Zahteva pa matematično skladnost med geometrijo in lokalno energijsko-gibalno porazdelitvijo.

Ukrivljanje svetlobnega žarka

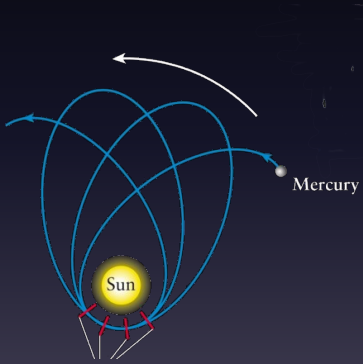


Sončni mrk 1919





Merkurjev tir

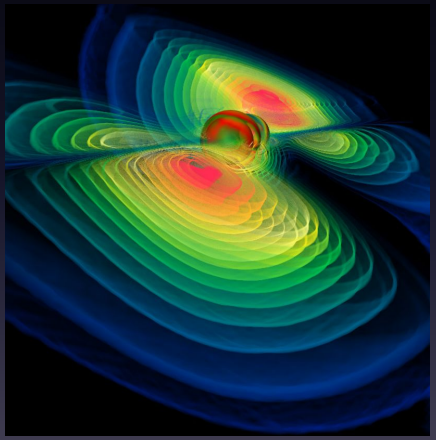


Vzroki za precesijo	
Količina (sek./stol.)	Razlog
531.63	Gravitacijski vpliv drugih planetov
0.0254	Sploščenost Sonca
42.98	Splošna relativnost
574.64	Skupno
574.10	Opazovano

Gravitacijsko lečenje

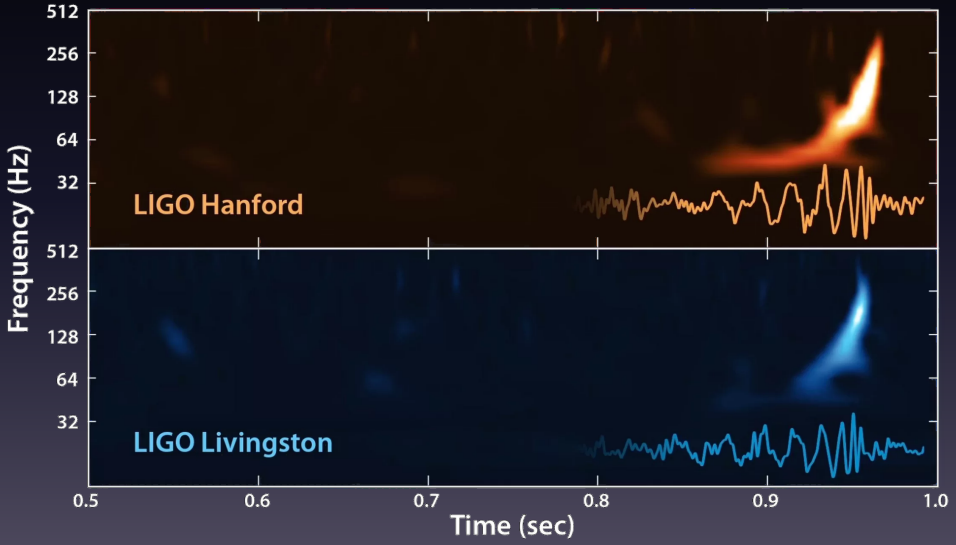


Gravitacijski valovi



V letu 1974 sta Russel A. Hulse in Joseph H. Taylor opazovala prvi znani binarni sistem pulzarjev z imenom PSR1913+16. Opazila sta, da se obhodni čas s časom spreminja. Sprememba obhodnega časa se je natanko ujemala z napovedmi splošne teorije relativnosti o izgubi energije oziroma vrtilne količine na račun sevanja gravitacijskih valov. Leta 1993 sta za to odkritje prejele Nobelovo nagrado za fiziko.

Detekcija gravitacijskih valov



Napoved gravitacijskih valov

Ko je bilo 11. februarja leta 2016 prvič objavljeno, da sta detektorja LIGO in Virgo v Združenih državah Amerike zaznala gravitacijske valove, so tako rekoč vsi mediji enoglasno poročali, da so detektorji za gravitacijske valove zaznali gravitacijske valove, ki jih je Albert Einstein predvidel pred 100 leti.
No, resnica o tem, da je Einstein pred 100 leti predvidel gravitacijske valove, ko je leta 1916 izšel njegov članek o splošni teoriji relativnosti, je drugačna.
Ko je Einsteinov članek dobil v roke Karel Schwarzschild, mu je v pismu poslal rešitev enačb za črno luknjo in napovedal obstoj gravitacijskih valov. V dokumentu iz 19 februarja 1916 najdemo Einsteinov odgovor Schwarzschildu. Einstein je bil presenečen, kako je Schwarzschild elegantno rešil enačbe, ni pričakoval, da obstajajo tako preproste rešitve. Vendar pa ni verjel, da ima rešitev za črno luknjo fizikalno osnovo. Einstein v tem pismu tudi omenja, da gravitacijski valovi ne morejo obstajati zaradi posebne narave gravitacije, ki se razlikuje od elektromagnetizma. To opraviči s tem, da je gravitacijska sila le privlačna, medtem ko se električni naboji privlačijo, če so različni, sicer pa se odbijajo (v elektromagnetiki obstajajo dipoli v gravitaciji pa ne).
V sestavku v Wikipediji piše, de je leta 1905 Henri Poincaré prvi pokazal na obstoj gravitacijskih valov, ki naj bi se razširjali s svetlobno hitrostjo. Poincaré ni bil v tem času v poročilih o odkritju gravitacijskih valov nikoli omenjen, niti v strokovnih sferah ne.

Pismo Einsteina Schwarzschildu

194. To Karl Schwarzschild

[Berlin, 19 February 1916]

Esteemed Colleague,

Unfortunately because of a lot of work I was not yet able to answer your earlier letter.[1] Also, the special cases discussed there awoke my interest to a lesser degree. But I find your new communication very interesting. I have found your calculation confirmed. My comment in this regard in the paper of November 4 no longer applies according to the new determination of $\sqrt{-g} = 1$, as I was already aware.[2] The choice of coordinate system according to the condition $\sum \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0$ is not consistent with $\sqrt{-g} = 1$. Since then, I have handled Newton's case differently, of course, according to the final theory.[3]—Thus there are no gravitational waves analogous to light waves. This probably is also related to the one-sidedness of the sign of scalar T, incidentally. (Nonexistence of the "dipole".)[4]

Cordial greetings and many thanks for the interesting communication. Yours,

A. Einstein.